

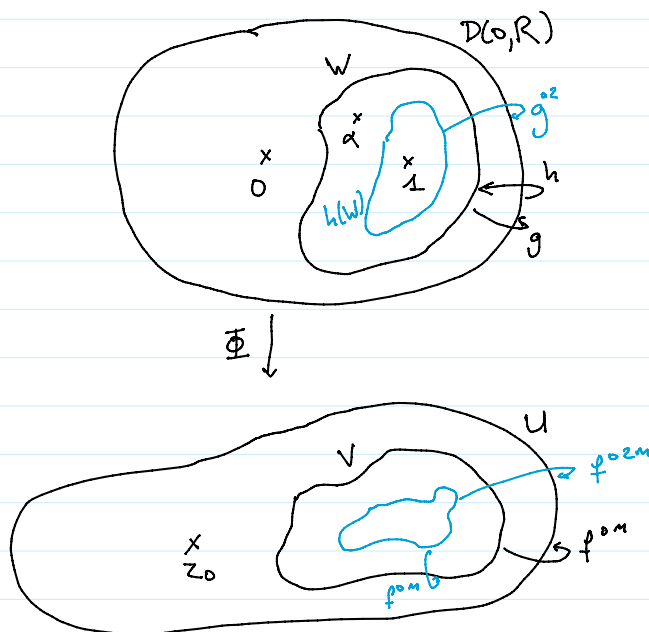
1. Fractions rationnelles avec multiplicateurs entiers

Variante de la démonstration de Ji & Xie due à Buff & Gauthier & H & Raissy

Soient A un sous-anneau discret de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{C}(z)$ de degré $d \geq 2$ telle que $\lambda f \in A$.
Montrons que f est exceptionnelle.

$$\mathcal{P}_f = \bigcup_{n \geq 1} f^{\circ n}(C_f) \quad \text{où } C_f = \{\text{points critiques}\}$$

f admet un point périodique répulsif $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{P}_f$ avec période p et multiplicateur λ .
Quitte à remplacer f par $f^{\circ p}$, on peut supposer que $p=1$.



$$\begin{aligned} \Phi: D(0, R) &\xrightarrow{\sim} U, \quad \Phi(z_0) = z_0, \quad \Phi(\lambda z) = f \circ \Phi(z) \\ W &= \Phi^{-1}(V), \quad g = \Phi^{-1} \circ f^{\circ n} \circ \Phi: W \xrightarrow{\sim} D(0, R), \quad h = g^{-1} \\ g(1) &= 1, \quad \alpha = h(z_0) \in W \end{aligned}$$

$$f^{\circ n}: V \xrightarrow{\sim} U$$

Il suffit de montrer que g est affine (auquel cas $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est périodique puis f est exceptionnelle d'après Ritt).

$$n \in \mathbb{N}. \quad D(0, R) \xrightarrow{\lambda^n} D(0, \frac{R}{|\lambda|^n}) \xrightarrow{h} W \subset D(0, R)$$

Il existe $w_n \in W$ tel que $w_n = h(\frac{w_1}{\lambda^n})$.
On a $w_n = \lambda^n g(w_n)$.

Le point $z_n = \Phi(w_n) \in V$ est périodique pour f avec période $m+n$ et multiplicateur μ_n .
On a $\mu_n = \lambda^n g'(w_n)$.

$$\text{On a } w_n = h\left(\frac{w_1}{\lambda^n}\right) \xrightarrow{n} h(z_0) = \alpha \quad \text{car } \frac{w_1}{\lambda^n} \xrightarrow{n} 0$$

$$\text{et puis } w_n = \alpha + h'(z_0) \times \frac{w_1}{\lambda^n} + o\left(\frac{w_1}{\lambda^n}\right) = \alpha + \frac{\alpha h'(z_0)}{\lambda^n} + o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{On a } g'(w_n) &= g'(\alpha) + g''(\alpha)(w_n - \alpha) + o(w_n - \alpha) \\ &= g'(\alpha) + \frac{\alpha h'(z_0) g''(\alpha)}{\lambda^n} + o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } g'(w_n) &= g'(\alpha) + g''(\alpha)(w_n - \alpha) + o(w_n - \alpha) \\ &= g'(\alpha) + \frac{\alpha h'(\alpha) g''(\alpha)}{\lambda^n} + o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right) \\ &= a + \frac{b}{\lambda^n} + o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right) \quad \text{avec } a = g'(\alpha) \neq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } p_n = \lambda^n g'(w_n) = a\lambda^n + b + o(1).$$

Affirmation. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, p_n = a\lambda^n + b$

Preuve. Écrivons $p_n = a\lambda^n + b + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow{n} 0$.

$$\text{On a } \underbrace{\lambda p_n - p_{n+1}}_{\in A} = (\lambda - 1)b + \underbrace{\lambda \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}_{\xrightarrow{n} 0}$$

Donc $(\lambda - 1)b \in \overline{A} = A$ et puis $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \lambda p_n - p_{n+1} = (\lambda - 1)b$ car A est discret
i.e. $\varepsilon_{n+1} = \lambda \varepsilon_n$

Donc $\forall n \geq N, \varepsilon_n = 0$ puisque $|\lambda| > 1$ et $\varepsilon_n \xrightarrow{n} 0$ $\square$

$$\forall n \geq N, g'(w_n) = \frac{p_n}{\lambda^n} = a + \frac{b}{\lambda^n} = a + b \frac{g(w_n)}{w_n}.$$

Comme $w_n \xrightarrow[n]{\neq} \alpha$, on a $\forall z \in W, g'(z) = a + b \frac{g(z)}{z}$.

Comme $g(1) = 1$, on obtient

$$\forall z \in W, g(z) = \begin{cases} z + (\mu - 1) \log(z) & \text{si } b = 1 \\ \frac{\mu - b}{1 - b} z + \frac{1 - \mu}{1 - b} z^b & \text{si } b \neq 1 \end{cases} \quad \text{où } \mu = g'(1) = a + b \quad (1)$$

Par le même raisonnement, on a

$$\begin{aligned} \forall z \in h(W), g^{\circ 2}(z) &= z + (\mu^2 - 1) \log(z) \\ \text{ou } \forall z \in h(W), g^{\circ 2}(z) &= \frac{\mu^2 - \hat{b}}{1 - \hat{b}} z + \frac{1 - \mu^2}{1 - \hat{b}} z^{\hat{b}} \quad \text{avec } \hat{b} \neq 1 \end{aligned} \quad (2)$$

(1) et (2) sont incompatibles si $b \neq 0$.

Donc $b = 0$ puis $\forall z \in W, g(z) = 1 + \mu(z - 1)$. $\square$

On a utilisé :

Proposition. Soit $f \in \mathbb{C}(z)$ telle que $f^{\circ p}$ est exceptionnelle pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$.
Alors f est exceptionnelle.

Preuve. À $f \in \mathbb{C}(z)$ telle que $|B_f| < +\infty$, on associe un orbifold $\mathcal{O}_f$, et f est exceptionnelle ssi $\mathcal{O}_f$ est parabolique.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathcal{O}_{f^{\circ p}} = \mathcal{O}_f$. $\square$